Teoria miary
WPPT IIr. semestr letni 2008
Twierdzenie Poincaré

26/05/08

Definicja. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową. *Transformacją zachowującą miarę* nazywamy odwzorowanie $T : X \to X$, które jest mierzalne, tzn. $\forall_{A \in \mathcal{F}}\ T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ oraz zachowuje miarę (przez przeciwobraz), tzn. $\forall_{A\in\mathcal{F}}\ \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Transformacje takie można iterować: $T^n(x) = T(T(...T(x)...))$. Dodatkowo oznaczmy przez T^0 identyczność: $T^0(x) = x$. Każda iteracja T^n $(n \geq 0)$ jest mierzalna i zachowuje miarę. Iteracje stanowią półgupęprzemienną, (to znaczy składanie ich jest łączne i przemienne. Faktycznie, $T^n \circ T^m = T^{n+m}$, a dodawanie w wykładniku jest łączne i przemienne. Czwórka $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ nazywa się *(miarowym) układem dynamicznym.* Interesują nas *trajektorie* punktów $O(x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}$, w szczególności to, czy i jak często dana trajektoria odwiedza dany zbiór mierzalny A.

Fundamentalnym twierdzeniem teorii układów dynamicznych jest twierdzenie Poincaré o powrocie (Henri Poincaré, wersja dla miary objętości 1890).

Twierdzenie Poincaré. *Niech $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ będzie układem dynamicznym, gdzie μ jest nieujemną miarą skończoną. Niech $A \in \mathcal{F}$ spełnia $\mu(A) > 0$. Wtedy trajektoria prawie każdego punktu $x \in A$ powraca do A nieskończenie wiele razy.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że zbiór punktów z A, które nigdy nie wracają do A ma miarę zero. Niech $B \subset A$ oznacza ten zbiór. Jest on mierzalny, gdyż

$$B = A \cap \bigcap_{n\geq 1} T^{-n}(A^c).$$

Teraz $T^{-n}(B)$ jest rozłączny z A (a więc i z B), gdyż punkty z przekroju tych zbiorów byłyby w A i wpadałyby do B (więc i wracały do A) po n krokach. Podobnie $T^{-n}(B)$ i $T^{-(n+m)}(B)$ są rozłączne jako przeciwobrazy przez T^n rozłącznych zbiorów B i $T^{-m}(B)$. Zatem wszystkie zbiory $T^{-n}(B)$ są parami rozłączne, a z zachowywania miary mają one taką samą miarę. Gdyby miara ta była dodatnia, to ich suma miałaby miarę nieskończoną, co przeczy skończoności miary. Zatem $\mu(B) = 0$.
Powtarzając powyższe rozumowanie dla T^n w miejsce T otrzymamy, że zbiór B_n punktów, które nie wracają do A pod żadną iteracją odwzorowania T^n, ma miarę zero. Niech $A' = A \setminus \bigcup_n B_n$. Po pierwsze $\mu(A \setminus A') = 0$ (czyli A' jest ,,prawie całym A"), po drugie każdy punkt z A' powraca do A dla każdego n co najmniej pod jedną dodatnią iteracją T^n czyli pod $T^{i_n n}$ $(i_n \geq 1)$ czyli po $i_n n$ zwykłych iteracjach. Ponieważ $i_n n \geq n$ otrzymaliśmy dowolnie duże czasy powrotu x do A, a więc jest ich nieskończenie wiele. □

Interpretacja: Jeśli mamy ewolucję jakiegoś systemu rządzoną nie zmieniającymi sięw czasie prawami, przebiegającą w ,,przestrzeni stanów" wyposażoną w miarę skończoną zachowywaną w czasie i taką, że miara kul otwartych w przestrzeni stanów jest dodatnia, to po pewnym czasie system przyjmie stan dowolnie bliski stanu początkowego. Przeczy to (pozornie) II zasadzie termodynamiki! Pozornie, bowiem II zasada termodynamiki mówi właśnie między innymi, że żaden proces termodynamiczny nie jest w pełni stacjonarny (to znaczy nie zachowuje miary, albo rządzące prawa zmieniają się w czasie).

Tomasz Downarowicz